Rombaldi : Mathématiques pour l'agrégation p 724-727

106
155
158
160

$n \geq 1$

<u>Développement</u> : Décomposition polaire.

<u>Théorème</u> : L'application $(\Omega, S) \mapsto \Omega S$ réalise un homéomorphisme de $O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ sur $GL_n(\mathbb{R})$.

<u>Preuve</u> :

① <u>Théorème</u> : Si $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, $\exists ! B \in S_n^+(\mathbb{R})$, $A = B^2$

EXISTENCE
• $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ donc $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ tels que $A = P D {}^tP$ où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \lambda_2 & \\ (0) & & \ddots & \lambda_n \end{pmatrix}$. On pose $\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \sqrt{\lambda_2} & \\ (0) & & \ddots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$ et $B = P \Delta {}^tP$.

On a $B^2 = A$ et $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ (ses valeurs propres sont positives).

• Si φ est le polynôme d'interpolation de Lagrange défini par $\varphi(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, alors $\varphi(A) = P \varphi(D) {}^tP = P \Delta {}^tP = B$. C'est à dire que B est polynomiale en A.

UNICITÉ
• Si C est une autre racine carrée de A symétrique positive, on a alors $C^2 = A$ et C commute avec A ($AC = C^2C = CC^2 = CA$) donc avec B (car B est un polynôme en A). En définitive les matrices B et C commutent et sont symétriques. Elles sont donc simultanément diagonalisables dans une base orthonormée ie $\exists Q \in O_n(\mathbb{R})$, $C = Q \Gamma {}^tQ$ et $B = Q \Lambda {}^tQ$ avec Γ et Λ diagonales à coefficients réels positifs.

De $C^2 = A = B^2$, on en déduit que $\Gamma^2 = \Lambda^2$ (Q est inversible) et $\Gamma = \Lambda$ car ces matrices sont diagonales à coefficients réels positifs. Ainsi $B = C$.

② <u>Corollaire</u> : Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $\exists ! (\Omega, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$, $A = \Omega S$.

$\det A = \det \Omega \det S = \pm \det S \neq 0$

• Si $A = \Omega S$, alors ${}^tAA = {}^tS {}^t\Omega \Omega S = S {}^t\Omega \Omega S = S^2$ et S est la racine carrée positive de la matrice symétrique définie positive ${}^tAA$ ($\langle {}^tAAx, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle = \|Ax\|^2 > 0 \ \forall x \neq 0$). La matrice Ω est alors donnée par $\Omega = AS^{-1}$ (A inversible entraîne S inversible).

On a donc, en cas d'existence, l'unicité des matrices Ω et S (S est unique d'après le théorème précédent).

• Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, alors ${}^tAA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et d'après le théorème

S est inv : $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ donc $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$, ${}^tP\,S\,P = D$ et $\det S = \det D \neq 0$ car $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ donc de vp > 0.

↗ cf s'adapte (cet form) ds le prod def positif.

$\exists! \, S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $S^2 = {}^tAA$. En posant $\Omega = AS^{-1}$, on a $A = \Omega S$ et

${}^t\Omega\,\Omega = {}^t(S^{-1})({}^tAA)S^{-1} = ({}^tS)^{-1}S^2S^{-1} = S^{-1}S = I_n$

donc Ω est orthogonale

③ On passe maintenant à la preuve du théorème.

On sait (d'après ce qui précède) que $\forall A \in GL_n(\mathbb{R})$, $\exists! (\Omega, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ $A = \Omega S$. On en déduit que l'application $\varphi : (\Omega, S) \mapsto \Omega S$ réalise une bijection de $O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ sur $GL_n(\mathbb{R})$.

Cette application est continue car ses composantes sont des fct cont (car polynomiales des coeff w_{ij} de Ω et s_{np} de S). Montrons que φ^{-1} est continue.

Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $GL_n(\mathbb{R})$ qui cv vers A. On note

bij, c'est ok — $\varphi^{-1}(A_k) = (\Omega_k, S_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ et $\varphi^{-1}(A) = (\Omega, S)$.

De la suite $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ds le compact $O_n(\mathbb{R})$, on peut extraire une sous suite

$\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ stu croissante — $(\Omega_{\psi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui cv vers $\Omega' \in O_n(\mathbb{R})$.

De $S_k = {}^t\Omega_k A_k$, on en déduit que $(S_{\psi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ cv vers $S' = {}^t\Omega' A$ et

pk? S' est sym pos comme lim d'une suite de mat sym pos et elle est définie car inversible.

On a alors la décomposition polaire $A = \Omega' S'$. Cette dernière étant unique, $\Omega = \Omega'$ et $S = S'$.

On a donc montré que $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ a une unique valeur d'adhérence dans le compact $O_n(\mathbb{R})$. Elle cv donc vers Ω et $(S_k)_{k\in\mathbb{N}} = ({}^t\Omega_k A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ cv vers ${}^t\Omega A = S$

ie $((\Omega_k, S_k))_{k\in\mathbb{N}} = (\varphi^{-1}(A_k))_{k\in\mathbb{N}}$ cv vers $(\Omega, S) = \varphi^{-1}(A)$ et φ^{-1} est continue. (caractérisation séquentielle de la continuité)

Prérequis

p 724 — **Théorème** : diagonalisation simultanée d'endomorphismes symétriques

p 726 — **Lemme** : $O_n(\mathbb{R})$ est compact dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Lemme : Soit (X, d) un espace métrique compact, alors toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui possède une unique valeur d'adhérence converge vers ℓ.

Preuve : voir dans mes documents

ou gourdon analyse p 30